极限与连续习题课

一. 内容与要求

1. 了解极限的两个存在准则并会应用

2. 会用两个重要极限求极限

3. 掌握无穷小的比较与无穷小阶的估计,会利用等价无穷小替换求极限

4. 理解函数在一点连续、间断的概念，会判断间断点的类型

5. 了解初等函数的连续性，掌握闭区间上连续函数的性质

知识要点:

1. 两个准则：夹逼准则、单调有界必有极限准则

2. 两个重要极限(一般形式)

$1^0\ \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\qquad 2^0\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

3.若： $u(x)\to 1, v(x)\to\infty, (1^\infty)$

$$\because \lim u(x)^{v(x)}=\lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

4. 常用的等价无穷小关系

$x \to 0$ 时,

$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,

$\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$(1+x)^{\mu}-1 \sim \mu x$ $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$ $(n \in N^{+})$

$\ln(1+x) \sim x$, $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}(a>0,\neq 1)$

$e^x-1 \sim x$, $a^x-1 \sim x\ln a(a>0,\neq 1)$

注： 以上各式中的x都可换成任意无穷小$u(x)$.

5. 间段点的判别方法:

间断点存在:(1)函数无定义点(分母为零的点)

(2)分段函数的分段点可能是间断点

间断点的类型:

- 第一类间断点
  - 可去间断点：$f(x_0-0), f(x_0+0)$存在且相等
  - 跳跃间断点：$f(x_0-0), f(x_0+0)$存在但不等
- 第二类间断点
  - 无穷间断点：$f(x_0-0), f(x_0+0)$至少有一为∞
  - 振荡间断点：其它

6. 求极限，常用方法如下：

（1） 利用极限的运算性质

（2） 利用函数的连续性

（3） 利用极限存在两个准则

（4） 利用两个重要极限

（5） 利用等价无穷小代换

（6） 利用左右极限

（7） 利用变量代换

7.判断极限不存在的方法：

(1). 子列（数列). (2).左、右极限.(3). 函数列.

二.典型例题

1. 求极限

$$(1).\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$$

$$(2).\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geq 0)$$

(1) 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$

解 $\because \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} \le \frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{1}{3}$$

由两边夹准则，原式 $=\frac{1}{3}$

两个常用的极限

(1) 若 $|q| < 1$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$；

(2) 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，那么 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$

例 设 $x_n = (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解 $\because 3^n < 1 + 2^n + 3^n < 3 \cdot 3^n \quad \therefore 3 < x_n < 3^{\frac{1}{n}} \cdot 3,$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} \cdot 3 = 3,$ 由两边夹准则，原式 $= 3$

思考：设 a,b,c,d 均为正数，则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + d^n} = \max\{a,b,c,d\}$$

(2). 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\ (x\geq 0)$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\max\{1,\ x,\frac{x^2}{2}\}$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ x, & 1< x\leq 2\\ \frac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}$$

注： 设$a_i>0,(i=1,2,\cdots m.)$,

求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n\cdots+a_m{}^n}=Max(a_1,a_2\cdots a_m)$

2 设$a>0,\ a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n}),\ n=0,1,2,\cdots$

试证$\{a_n\}$收敛, 并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\geq\sqrt{a}\quad\Rightarrow\{a_n\}$有下界

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a_n^{\ 2}})\leq 1\qquad(a_n^{\ 2}\geq a)$$

$\Rightarrow\{a_n\}$单调减少

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则$A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})\qquad A=\pm\sqrt{a}$

$\because a_n>0,\qquad\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$

3. 求极限

(1). $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\ (a\neq n\pi)$

(2). $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a>0,b>0,c>0)$

(3). $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

(1). $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\ (a\neq n\pi)$ (1^{∞})

解：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}} = e^{\cot a}$$

注：$\lim u(x)^{v(x)} = \lim\left[(1+u(x)-1)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right]^{[u(x)-1]v(x)}$

$$= e^{\lim v(x)[u(x)-1]}$$

(2). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(1^{∞})

解：先求

$$\lim_{x\to 0} v(u-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{a^{x+1}-a+b^{x+1}-b+c^{x+1}-c}{a+b+c}\right]$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left[\frac{a(a^{x}-1)}{x}+\frac{b(b^{x}-1)}{x}+\frac{c(c^{x}-1)}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a + b\ln b + c\ln c)$$

$$= \frac{\ln(a^a b^b c^c)}{a+b+c}$$

原式 $= e^{\frac{\ln(a^a b^b c^c)}{a+b+c}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$

(3). $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (1^{∞})

解: 原式 $= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x(\sin x - 1)}$ $\underline{\underline{令 x-\frac{\pi}{2}=t}}$ $e^{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{-\sin t}(\cos t - 1)}$

$$= e^{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{-t}(-\frac{t^2}{2})} = e^0 = 1$$

4. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+\sin^2 x)-x}{\ln(e^{2x}+x^2)-2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\ (m.n\in N^+)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x}\quad(\alpha,\beta\neq 0)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

解. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin^2 x\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$$

$$(2)\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^{-x}\sin^2 x)}{\ln(1+e^{-2x}x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{e^{-2x}x^2}=1$$

解法二：$\ln(e^x+\sin^2 x)=\ln[e^x(1+\frac{\sin^2 x}{e^x})]$

$$=x+\ln(1+\frac{\sin^2 x}{e^x})=x+\ln(1+e^{-x}\sin^2 x)$$

$$(3)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\quad(m,n\in N^{+})$$

解: $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}\overset{令x-\pi=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\sin m(\pi+t)}{\sin n(\pi+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-1)^m mt}{(-1)^n nt}=\frac{(-1)^{m-n}m}{n}$$

注: $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin x$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos\beta x}{\ln\cos\alpha x}\quad(\alpha,\beta\neq 0)\qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos\beta x-1)}{\ln(1+\cos\alpha x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\beta x-1}{\cos\alpha x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\beta x)^2}{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}\quad=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

(5). 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

注意此项含绝对值

解:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$\Longrightarrow$ 原式 $=1$

5. 已知 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

解： 由题设知 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0$

进而知 $\lim_{x\to 0} f(x)\sin 2x = 0$

于是有 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3}=2$$

所以 $\lim_{x\to 0} f(x)=6$

6.(1).求$x \to 1^+$时, $f(x)=\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot \ln x$
是$x-1$的几阶无穷小?

(2)$x \to 0$时$f(x)=e^{x^2}-\cos x$是x的几阶无穷小?

1.10总习题 1(8)

解(1). $\because f(x)=\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{(x-1)^{3/2}}=2$$

$\therefore$ 当$x \to 1$时, $f(x)$是$x-1$的$\dfrac{3}{2}$阶无穷小.

(2) $f(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

即 $f(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x$

$$\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$$

$\therefore x\to 0$ 时 $f(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是 x 的2阶无穷小。

注：若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq -1$，则

$$\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$$

7 设$f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,讨论间断点及类型

1.10 总习题1(7).

解 间断点：$x=1,\ 1-e^{\frac{x}{x-1}}=0\Rightarrow x=0.$

$$x=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-\dfrac{x}{1-x}}=-1,$$

$\therefore x=0$为可去间断点。

$$x=1,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1,\left(\frac{x}{1-x}\to-\infty,e^{\frac{x}{1-x}}\to 0\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0,\left(\frac{x}{1-x}\to+\infty,e^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty\right).$$

$x=1$为跳跃间段点。

8.(1) 讨论$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}\ (x\ge 0)$的连续性.

解 当 $x\in[0,1)$ 时, $f(x)=0$;

当$x=1$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{2}$; 即 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$

当$x>1$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\frac{1}{x})^n+1}=1$

由初等函数连续性知:

$f(x)$在$[0,1)$及$(1,+\infty)$ 内连续, $x=1$是$f(x)$的跳跃间断点.

(2).设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}$为连续函数，求$a,b$

解:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & |x|<1 \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-1}}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=\dfrac{1}{x} & |x|>1 \\ \dfrac{1}{2}(1+a+b) & x=1 \\ \dfrac{1}{2}(-1-a+b) & x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1=a+b,-a+b=-1$$

注：$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \infty & |x|>1 \\ 1 & x=1 \\ \text{不存在} & x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1,b=0$$

9 设 $f(x)\in C_{[a,b]}, a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,

证明$\exists\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]$

证: 当$n=1$时, 取$\xi=x_1$即可.

当$n\geq 2$时, $\because f(x)\in C_{[x_1,x_n]}$

$$\therefore \exists M=\max_{x\in[x_1,x_n]} f(x),\quad m=\min_{x\in[x_1,x_n]} f(x)$$

$$\because m\leq\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\leq M$$

$\therefore\ \exists\xi\in[x_1,x_n]\subseteq(a,b)$使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]$$

综上, 结论成立.

10.设$f(x)\in C_{[0,2a]}$,且$f(0)=f(2a)$,,证明:$\exists\xi\in[0,a]$,使得$f(\xi)=f(a+\xi)$.

1.10 总习题　第10题

证明　令$F(x)=f(x)-f(a+x)\in C_{[0,a]}$

$$F(0)=f(0)-f(a),$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

(1)若$f(a)\neq f(0)$,则$F(0)\cdot F(a)<0$根据零点定理:

$\exists\xi\in[0,a]$,使得$F(\xi)=0$,即$f(\xi)=f(a+\xi)$.

(2)若$f(a)=f(0)$,取$\xi=0$　即得$f(\xi)=f(a+\xi)$.